



U3V

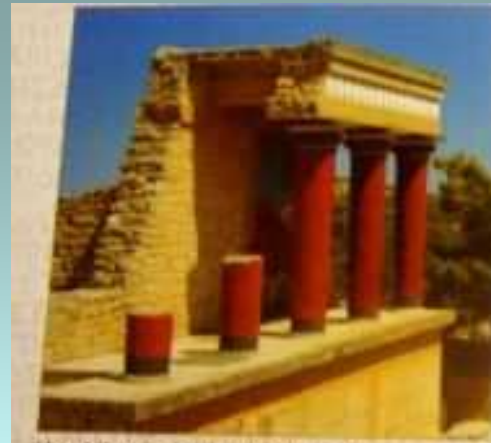
Matematika

Semestr 1

Přednáška 01

Zlatý řez

Začínáme u starých Řeků



Heraklion, palác Knóssos, Kréta



Parthenon, Athény, Řecko



Apollónův chrám, Korint, Řecko

Jaké problémy si pro dnešek vybereme?

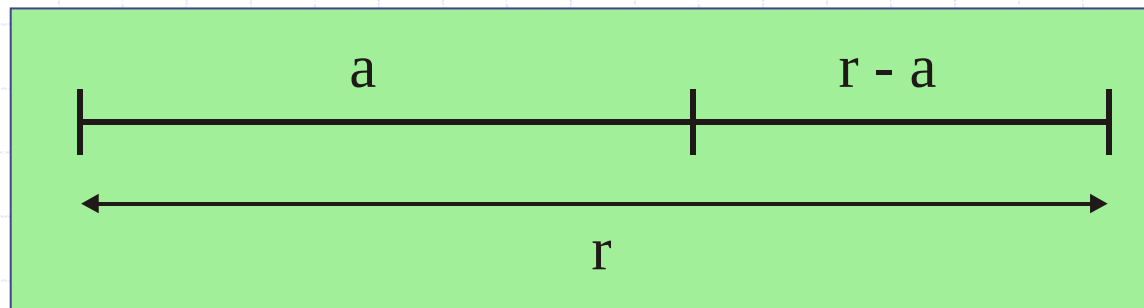
- Co je to zlatý řez a zlatý poměr?
- Racionalita a iracionalita
- Řetězové zlomky
- Pravidelné n-úhelníky
- Fibonacciho čísla
- Problém chybějícího čtverečku atd.

Základní fakta

Jak je definován zlatý řez?

Rozdělme úsečku na dvě části tak, že bude platit:

Poměr délky celé úsečky ku délce větší části je roven poměru délky větší části ku délce kratší části.



Zapišeme to rovnicí:

$$\frac{r}{a} = \frac{a}{r - a}$$

Odtud pak plyne, že:

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 - \left(\frac{r}{a}\right) - 1 = 0$$

Jak řešit rovnici

$$x^2 - x - 1 = 0 ?$$

Dosazením do
vzorce získáme:

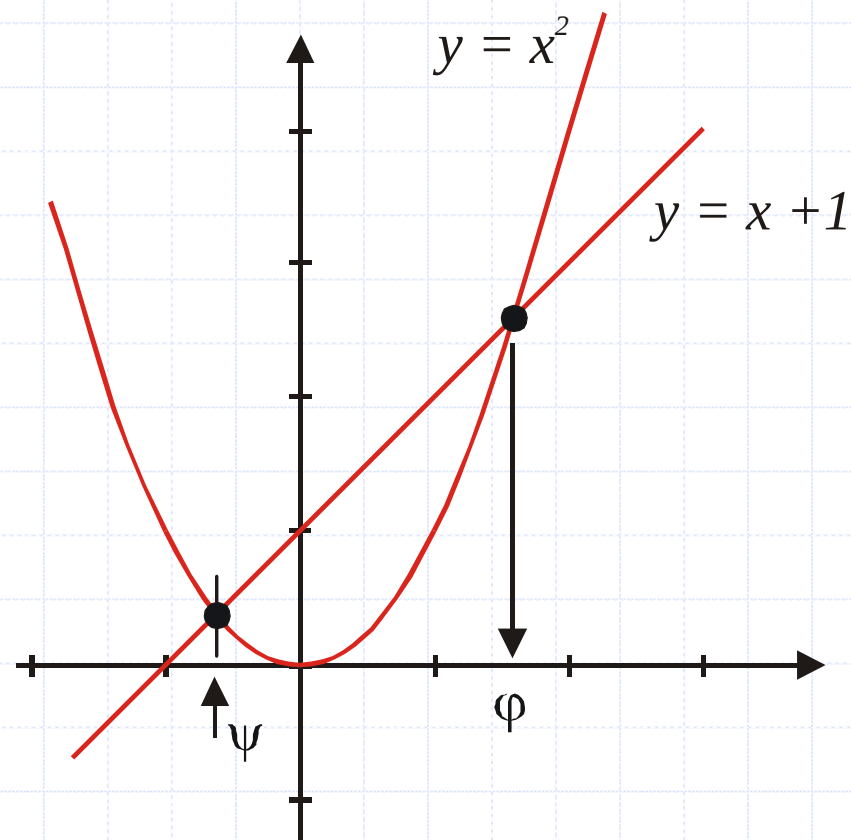
$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618034$$

$$\psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \approx -0,618034$$

Přitom platí tyto
důležité vztahy:

$$\varphi + \psi = 1 \quad \varphi^2 = \varphi + 1$$

$$\varphi \cdot \psi = -1 \quad \psi^2 = \psi + 1$$



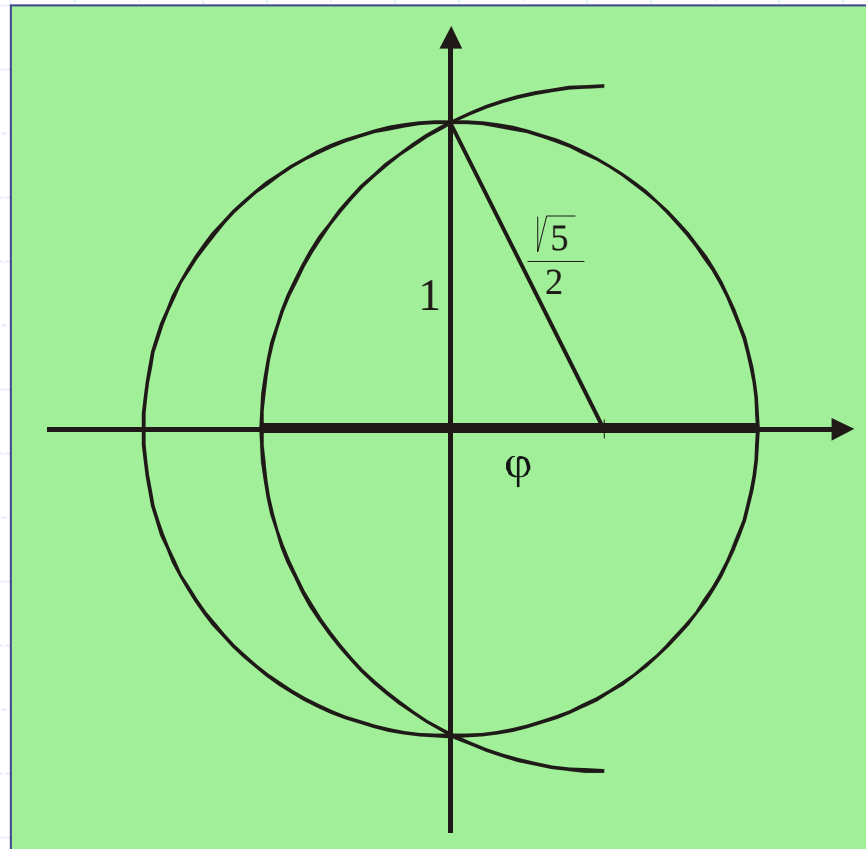
Jak geometricky zkonstruovat číslo φ ?

Eukleidovská konstrukce úsečky, která má délku φ , vyplývá z vyjádření tohoto čísla.

Užijeme pouze
Pythagorovu větu:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

**Číslo φ říkáme
zlatý poměr.**



Iracionalita

Začněme s racionalitou

Definice:

Každé kladné racionální číslo lze zapsat ve tvaru zlomku, kde čítec i jmenovatel jsou přirozená čísla.

Platí tato věta:

Racionální čísla mají buď **ukončený** anebo **nekonečný periodický** desetinný rozvoj.
(Proč??)

Pokračujeme iracionalitou

Definice:

Každé kladné číslo, které není racionální, je iracionální.

Z toho ovšem plyne, že:

- kladné iracionální číslo **nelze zapsat** ve tvaru zlomku, kde čítec i jmenovatel jsou přirozená čísla,
- iracionální čísla mají **nekonečný neperiodický** desetinný rozvoj.

Problém

Existuje nějaká polopřímka s počátkem v počátku souřadnic, která kromě něj neprochází již žádným dalším mřížovým bodem?

[Polopřímka a mřížové body.fig](#)

Budeme potřebovat jen větu, že každé přirozené číslo (větší než 1) lze jednoznačně rozložit na součin prvočísel.

Iracionalita čísla φ

Víme-li již že odmocnina z pěti je iracionální číslo, snadno se již dokáže, že i číslo φ je iracionální.

A jak??

Pro každé iracionální číslo je zajímavé hledat jeho **racionální aproximace**.

Co víte o aproximacích čísla π ?

Řetězové zlomky

Co plyne z definice čísla φ ?

Platí rovnost:

Dělením pak získáme:

Postupným dosazováním získáme „výraz“:

Tato představa nám
umožní postupně
vypočítávat racionální
aproximace. (Jak?)

[Zlatý poměr.xls](#)

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \text{atd}}}}}$$

Pravidelný desetiúhelník

Zlatý trojúhelník

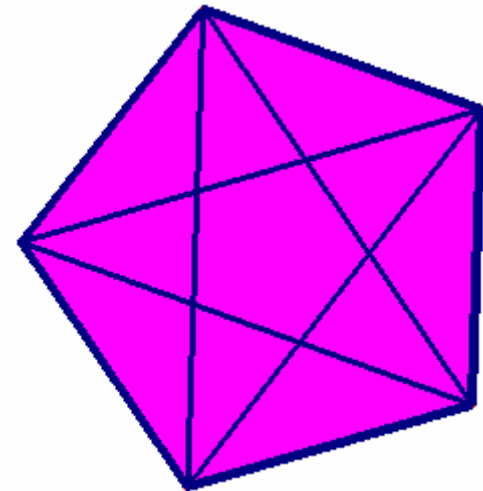
Definice:

Zlatým trojúhelníkem nazýváme každý rovnoramenný trojúhelník, který má úhel proti základně velikosti 36° .

Jaké má zlatý trojúhelník vlastnosti?

[Zlatý trojúhelník.fig](#)

Číslo ϕ nalezneme mnohokrát
v pentagonu. **(Proč??)**



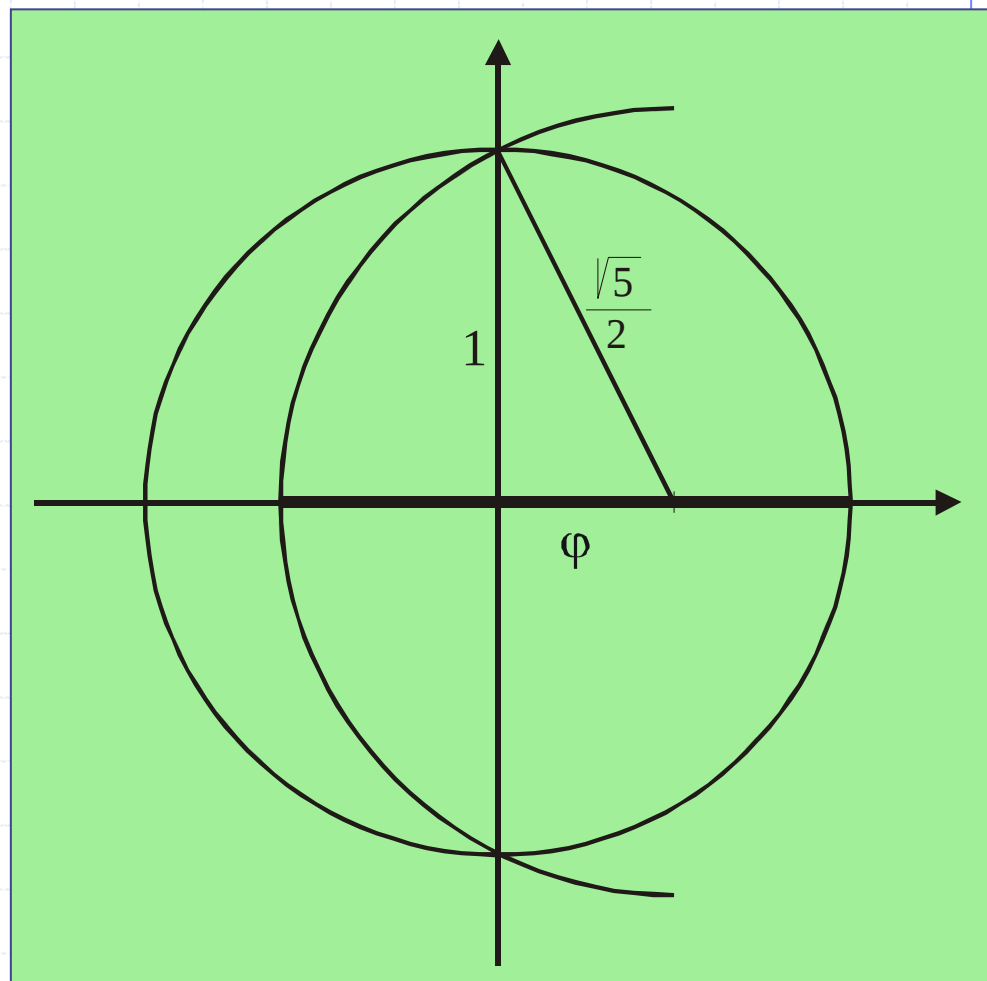
Konstrukce pravidelného desetiúhelníku

Pravidelný desetiúhelník se skládá z deseti zlatých trojúhelníků.

Poměr poloměru jemu opsané kružnice a jeho strany je tedy roven zlatému poměru.

Odtud pak plyne:

$$\frac{r}{a} = \varphi \Rightarrow a = \frac{r}{\varphi} = r \cdot (\varphi - 1)$$



[Konstrukce desetiúhelníku.fig](#)

Fibonacciho posloupnost

Jak vznikají Fibonacciho čísla ?

Fibonacciho čísla lze postupně vypočítávat podle této rekurentní definice:

$$F_1 = F_2 = 1 \qquad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Jaký je tedy začátek posloupnosti?

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ... atd.

Nepřipadají vám známá?

Objevovala se u aproximací čísla φ .
(Proč??)

$$\varphi_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$$

Vzorec pro Fibonacciho čísla

Fibonacciho čísla
můžeme vypočítávat
podle tohoto vzorce:

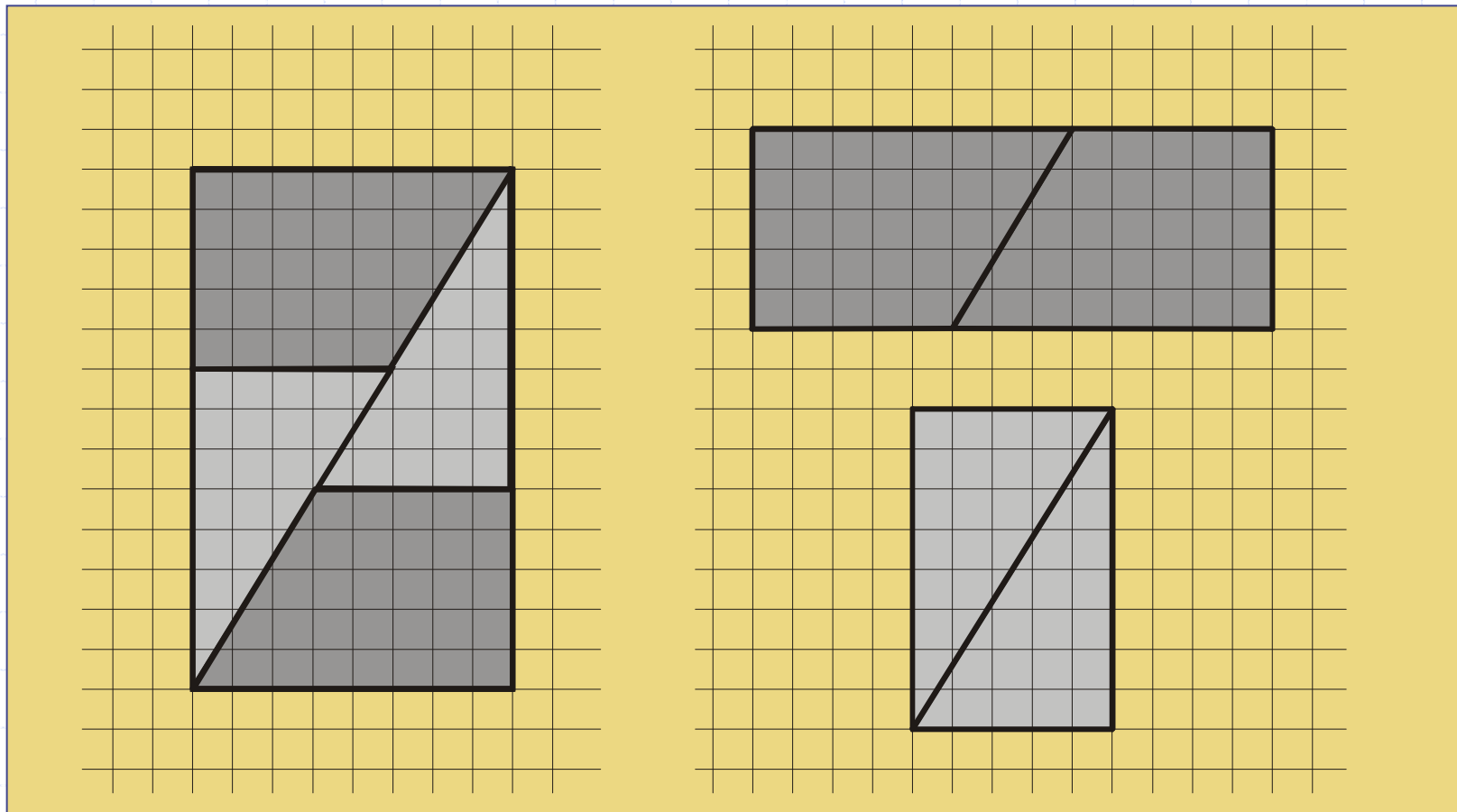
$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\varphi - \psi}$$

Důkaz není ani tak složitý, jako spíš dlouhý.
Spokojme se s ověřením pomocí Excelu:

[Fibonacci.xls](#)

Problém chybějícího čtverečku

Co se stane při přemístění obrazců?



Prohlédneme si to podrobně a počítejme obsahy!

Jak to vysvětlit?

Problém chybějícího čtverečku.cdr

Čtvereček tedy vzniká záměrně špatným kreslením.
A jaká je souvislost s Fibonacciho čísly?

$$\begin{aligned} & 5 \cdot 13 + 5 \cdot 8 - 8 \cdot 13 = \\ & = 5 \cdot (8 + 13) - 8 \cdot 13 = \\ & = \mathbf{5 \cdot 21 - 8 \cdot 13} = \\ & = 105 - 104 = 1 \end{aligned}$$

$$F_n \cdot F_{n+3} - F_{n+1} \cdot F_{n+2} = (-1)^{n+1}$$

[Fibonacci.xls](#)

Děkuji vám za pozornost

